

Kİ-KARE UYGUNLUK TESTİ

Ki-Kare testi şu adımlar gerçekleştirilerek yapılır.

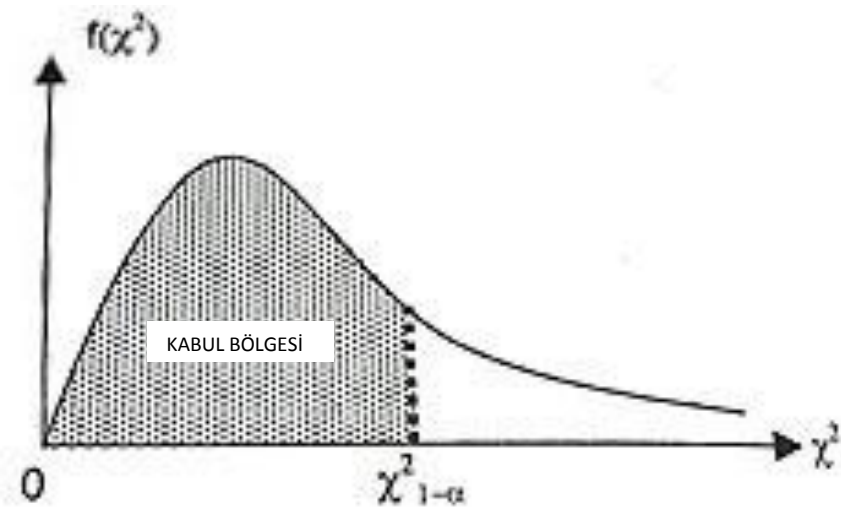
1. Örnek verilerin tüm parametrelere verilmiş veya tahmin edilmiş olan bir dağılımdan geldiği hipotezi kurulur.
2. Test edilen dağılımın aralığı, m adet alt bölgeye ve alt aralığa bölünür.
3. Her bir aralığa denk gelen teorik frekans değeri belirlenir. Burada her bir gruba düşen frekans sayısının veya örnek adedinin 5'ten az olmaması sağlanır.
4. Q_j örnekleme frekansı, E_j dağılımın teorik frekansı olmak üzere Ki-Kare değeri aşağıdaki bağıntı ile hesaplanır.

$$Ki - Kare = \sum_{j=1}^m \frac{(Q_j - E_j)^2}{E_j}$$

5. Belirlenen güvenirlilik değerine ve serbestlik derecesine göre tablodan Ki-kare değeri okunur.

Serbestlik Derecesi = $n - (\text{test edilen dağılımın parametre sayısı}) - 1$

6. Şayet hesaplanan Ki-kare değeri, tablodan okunan değerden küçükse hipotez KABUL aksi halde hipotez RED edilir.



KOLMOGOROV-SMIRNOV testi şu adımlar gerçekleştirilerek yapılır.

1. Örnek verilerin tüm parametrelere verilmiş veya tahmin edilmiş olan bir dağılımdan geldiği hipotezi kurulur.
2. Test edilen dağılımın aralığı, m adet alt gruba veya alt aralığa bölünür.
3. Test edilen dağılımın gruplara ait teorik birikimli olasılık değerleri bulunur. ($F(y)$)
4. Örneklemden elde edilen dağılımın birikimli olasılık değerleri bulunur. ($F_0(y)$)
5. Her alt aralık için $|F(y) - F_0(y)|$ değerlerini belirlenir.
6. D_n değeri belirlenir.

$$D_n = \max_{j=1, \dots, m} \{ |F(y) - F_0(y)| \}$$

7. D_{N_t} belirlenir. Bu değer tekli örnekleme yapılıyor ise

% 90 güvenirlilik için $D_{N_t} = \frac{1.22}{\sqrt{n}}$ bağıntısı ile,

% 95 güvenirlilik için $D_{N_t} = \frac{1.36}{\sqrt{n}}$ bağıntısı ile,

% 99 güvenirlilik için $D_{N_t} = \frac{1.63}{\sqrt{n}}$ bağıntısı ile hesaplanabilir.

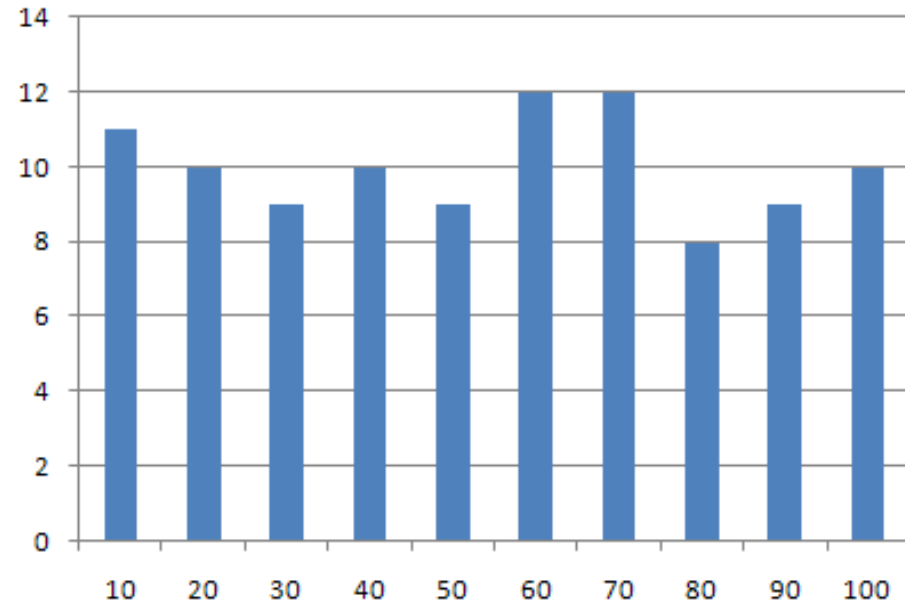
8. Şayet belirlenen D_N değeri, D_{N_t} değerden küçükse hipotez KABUL aksi halde hipotez RED edilir.

Örnek : Bir olay ile ilgili aşağıda verilen 100 adet verinin elde edildiğini farz edelim. Bu verilerden hareket ile bu olayın modellenebileceği dağılım türümü % 95 güvenirlilikte belirlemeye çalışalım.

44	93	73	57	62	82	32	14	1	34
70	9	39	18	70	45	4	95	73	19
21	47	14	23	74	96	13	87	73	48
76	42	11	49	55	69	70	32	79	100
58	1	83	37	19	92	59	48	64	24
23	21	54	71	30	47	55	64	30	75
87	36	86	83	96	8	51	88	95	9
20	58	28	40	26	68	35	8	9	9
39	34	95	95	47	20	90	67	100	82
65	4	19	57	57	8	63	52	68	60

Birinci adımda elde edilen verilerin özetlenmesi için gruplanmış serisi oluşturulur ve bu serinin grafiği çizilir.

Gruplar	Frekans
0-10	11
10-20	10
20-30	9
30-40	10
40-50	9
50-60	12
60-70	12
70-80	8
80-90	9
90-100	10



Bu seriye bakıldığı zaman;

H_0 : 0 ile 100 arasında değişen düzgün dağılımdır. Hipotezi kurulabilir.

Bunu sınamak için KOLMOGOROV-SMIRNOV testin adımlarını yansıtacak bir tablo oluşturacak olursak, aşağıdaki tablo elde edilir.

Gruplar	Frekans	Teorik frekans	$F_0(y)$	$F(y)$	$ F(y) - F_0(y) $
0-10	11	10	0.11	0.1	0.01
10-20	10	10	0.21	0.2	0.01
20-30	9	10	0.3	0.3	0
30-40	10	10	0.4	0.4	0
40-50	9	10	0.49	0.5	0.01
50-60	12	10	0.61	0.6	0.01
60-70	12	10	0.73	0.7	0.03
70-80	8	10	0.81	0.8	0.01
80-90	9	10	0.9	0.9	0
90-100	10	10	1	1	0

Buradan elde edilen mutlak en büyük fark 0,03 olduğundan D_N değeri olarak alınır.

değeri D_{Nt} olarak bulunur. Bu değer, bizim bulduğumuz hesaplama sonucundaki değerden büyük olduğu için, bu değerleri elde ettiğimiz olayın modellenmesinde 0 ile 100 arasında değişen düzgün dağılım kullanılabilir.

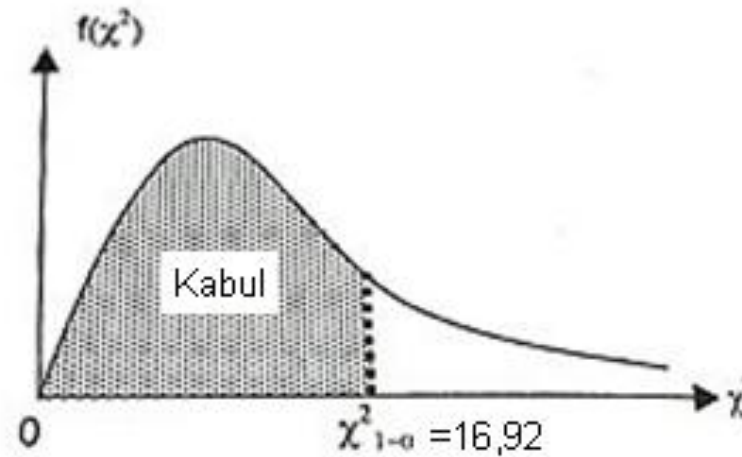
Aynı verileri Ki Kare testi ile sınavacak olursak, testin adımlarını yansıtacak bir tablo aşağıdaki gibi elde edilir.

Gruplar	Q_j	E_j	$\frac{(Q_j - E_j)^2}{E_j}$
0-10	11	10	0,1
10-20	10	10	0
20-30	9	10	0,1
30-40	10	10	0
40-50	9	10	0,1
50-60	12	10	0,4
60-70	12	10	0,4
70-80	8	10	0,4
80-90	9	10	0,1
90-100	10	10	0
		TOPLAM	1,6

Tabloda Ki kare değerine bakmak için önce serbestlik derecesini bulmamız gerekir. Düzgün dağılımı özetleyebilecek istatistiki bir ölçüt bulunmadığından bu dağılımın parametre sayısı 0 alınır. Buna göre;

$SD=10-0-1=9$ bulunur. %95 gvenirlikteki 9 serbestlik derecesindeki Ki kare tablo değeri 16.92 bulunur.

Bu değer, bizim bulduğumuz hesaplama sonucundaki değerden büyük olduğu için, bu değerleri elde ettiğimiz olayın modellenmesinde 0 ile 100 arasında değişen düzgün dağılım kullanılabilir.



2.3. RASSAL SAYI / RASSAL DEĞER

Girdi değişkenlerinin modelde alacakları değerlerin belirlenmesinde rassal sayılara ihtiyaç vardır. Rassal sayı; her hangi bir kurala bağlı olmadan ardı ardına oluşturulan, her birinin oluşturulması kendinden öncekilerden bağımsız olarak gerçekleşen sayılardır. Rassal sayılar 0 ile 1 arasında değer alabilirler. Burada üretilen her bir sayının oluşturulma ihtimali eşittir. Bu nedenle 0 ile 1 arasında değişen **düzgün dağılım** gösteren sayılardır.

Bu sayılar, belli yöntemler ile (orta kare yöntemi, doğrusal eşlik yöntemi vb.), fiziksel araçlar kullanarak (rulet, çok yüzlü zar vb.) veya çeşitli yöntemler ile oluşturulmuş literatürde yer alan rassal sayı tabloları kullanarak elde edilebilir. Bu tablolar ile bir rassal sayı belirlenecek ise, ilk sayı tablonun herhangi bir yerinden alınır, daha sonraki seçimler ilk seçilen sayının bulunduğu nokta baz alınarak bir kural (yukarı, aşağı, sağa, sola doğru ilerle gibi) çerçevesinde rassal sayı belirlemelerine devam edilmelidir.

EXCEL'in bir hücreğine "S_SAYI_ÜRET()" fonksiyonu yazılırsa o hücrede bir rassal sayı belirir.

Bir berber dükkânı simülasyonunda dükkâna gelen iki müşteri arasında geçen zaman, yani müşterilerin gelişler arası süresi, berberin traş süresi değerlerinin bilinmesi durumunda, bu dükkânın simülasyonu gerçekleştirilebilir. Bu girdi değişkeninde oluşan değerlerin birbirleriyle aynı olması beklenemez ve belli dağılımlar gösterirler. Kullanılan rassal sayıların, bu dağılımları yansıtabilmeleri için bir dönüşüme tabi tutulmaları gerekir. Bu dönüşüm sonunda elde edilen değere rassal değer adı verilir. Rassal değer, herhangi bir girdi değişkeninin simülasyon koşumu esnasında ürettikleri değerlerdir.

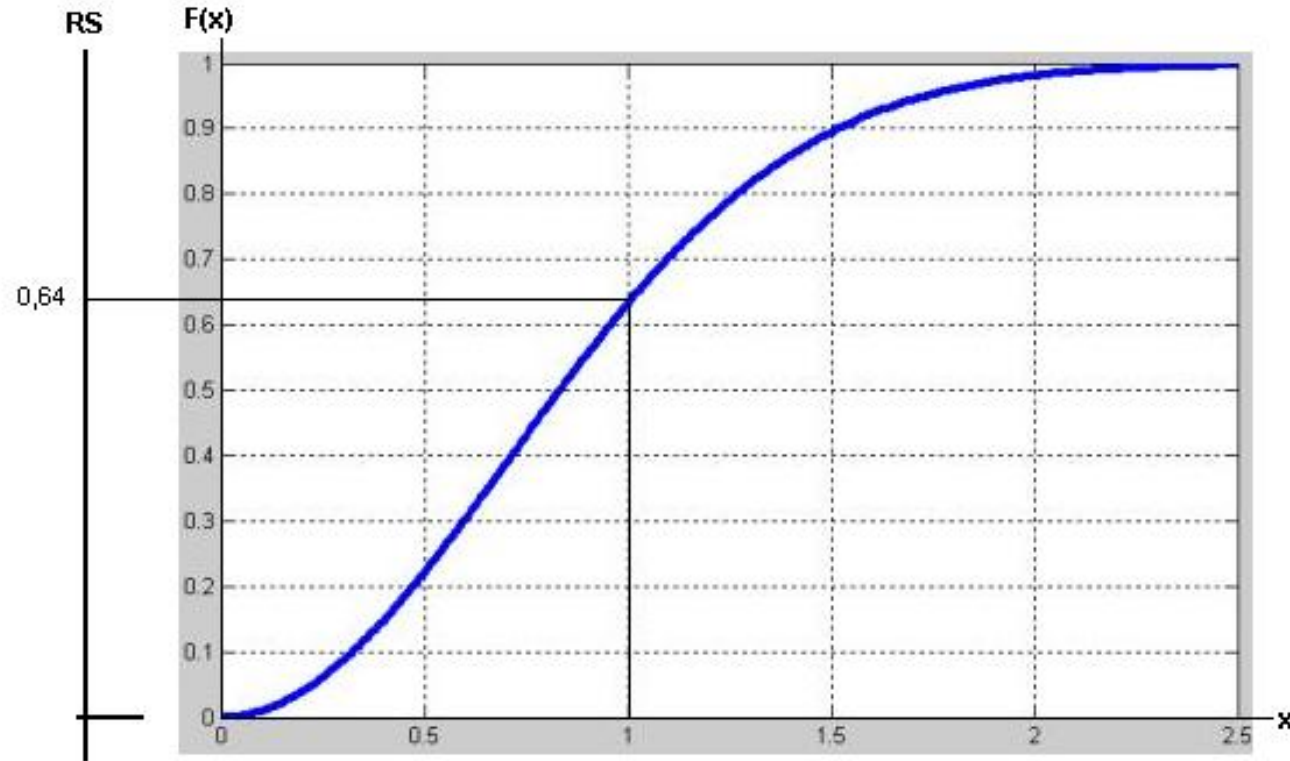


2.4. TERS DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

Rassal sayılar 0 ile 1 arasında değişim gösteren düzgün dağılım gösterir. Her dağılımın bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ($f(x)$) ve birikimli dağılım fonksiyonu ($F(x)$) vardır.

Her dağılımın birikimli dağılım fonksiyonu ($F(x)$) de 0 ile 1 arasında değişim gösterir.

Rassal sayıların dağılımın da, her dağılımın birikimli dağılım fonksiyonunun da ($F(x)$) 0 ile 1 arasında değer almasını kullanarak, rassal değer üretilir. Bu şekilde üretme metoduna ters dönüşüm yöntemi adı verilir. Bunu bir grafik üzerinde açıklamaya çalışalım.



Gözlenen bir olayda elde edilen değerlerin 0 ile 2,5 arasında değişebildiğini ve birikimli dağılım fonksiyonunda yukarıdaki grafikte olduğu gibi olduğunu ve bu olayda rassal değer elde etmek için kullanacağımız rassal sayısında 0,64 olduğunu farz edelim.

Buna göre ters dönüşüm ile yapılan işlem, 0.64 değerine karşılık $F(x)$ fonksiyonunun x değerini belirlemektir.

Sürekli dağılımlarda $F(x)$ fonksiyonunu elde etmek için, dağılımın $f(x)$ fonksiyonunun belirtilen aralıkta x e göre integralinin alınması gerekir.

$$RS = F(x) = \int f(x)dx \quad \text{olur.}$$

İntegral sonucunda elde edilecek fonksiyondan X çekilir ise eşitliğin diğer tarafında RS ya bağlı bir fonksiyon elde edilmiş olur. Bunun gösterimi de aşağıdaki gibidir.

$$X = F^{-1}(RS) \quad \text{olur.}$$

Bu fonksiyonda çekilen rassal sayı konur ise olayın modellendiği dağılıma göre oluşturulmuş bir rassal değer elde edilmiş olur.

Tüm dağılımların integralini elde etmek kolay olmadığından, bu tür dağılımlardan rassal sayı elde etmek için geliştirilmiş algoritmalar kullanmak gerekir.

Bazı örnekler vererek konuyu daha da açıklamaya çalışalım.

Örnek : Bir olayla ilgili olasılık frekans tablosunun aşağıdaki gibi oluştuğunu farz edelim. Buna göre 0.234 ; 0.827; 0.729 rassal sayılarına karşılık kullanılacak rassal değerleri bulalım.

Değer	Frekans	f(x)	F(x)	$F^{-1}(RS)$
3	20	0.20	0.20	0-0.20
4	33	0.33	0.53	0,201-0.53
5	22	0.22	0.75	0.531-0.75
6	10	0.10	0.85	0.751-0.85
7	15	0.15	1	0.851-1

0.234 rassal sayısına karşılık elde edilecek rassal değer 0,201-0.53 aralığına girdiği için 4, 0.827 rassal sayısına karşılık elde edilecek rassal değer 0.751-0.85 aralığına girdiği için 6 ve 0.729 rassal sayısına karşılık elde edilecek rassal değer 0.531-0.75 aralığına girdiği için 5 olacaktır.

Örnek : Bir olayla ilgili olasılık dağılım fonksiyonunun 0 ile 1 aralığında $f(x) = 3x^2$ diğer hallerde 0 olduğunu farz edelim. Buna göre rassal değer üretecek fonksiyonu bulalım.

$$RS = F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x 3x^2 dx \Rightarrow RS = F(x) = x^3 \text{ olur.}$$

Buradan x 'i çekersek, $X = F^{-1}(RS) = \sqrt[3]{RS}$ şeklindeki rassal değer elde edilecek fonksiyon bulunur.

Örnek : Bir olay a ile b aralığında düzgün dağılım gösterdiğini farz edelim. Buna göre rassal değer üretecek fonksiyonu bulalım.

Düzgün dağılımın olasılık dağılım fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ şeklindedir.}$$

$$RS = F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{b-a} dx \Rightarrow RS = F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ olur.}$$

Buradan x'i çekersek, $X = F^{-1}(RS) = a + (b-a)RS$ şeklindeki düzgün dağılımdan rassal değer elde edilecek fonksiyon bulunur.

Örnek : Bir olay ortalaması μ olan üstel dağılım gösterdiğini farz edelim. Buna göre rassal değer üretecek fonksiyonu bulalım.

Üstel dağılımın olasılık dağılım fonksiyonu

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{burada} \quad \lambda = \frac{1}{\mu} \quad \text{olduğundan}$$

fonksiyon $f(x; \mu) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}$ şeklinde de yazılabilir. O zaman

$$RS = F(x) = \int_0^x f(x) dx = \int_0^x \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} dx \Rightarrow RS = F(x) = 1 - e^{-x/\mu} \quad \text{ur.}$$

Buradan x 'i çekersek, $X = F^{-1}(RS) = -\mu \ln(1 - RS)$ olur.

Burada $(1 - RS)$ ifadesinin sonucu da bir rassal sayı olacağından,

$X = F^{-1}(RS) = -\mu \ln RS$ şeklindeki üstel dağılımdan rassal değer elde edilecek fonksiyon bulunur.

Örnek : Bir olay ortalaması μ standart sapması σ olan normal dağılım gösterdiğini farz edelim. Buna göre rassal değer üretecek fonksiyonu bulalım.

Normal dağılımın olasılık dağılım fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{şeklindedir.}$$

Bu fonksiyonun integralinin alınıp, buradan x çekilmesi oldukça zor işlemdir. Bu nedenle normal dağılım gösteren normal rassal sayılar (NRS) tabloları oluşturulmuş ve ortalaması μ standart sapması σ olan normal dağılım için rassal değer üretmekte de aşağıdaki denklem kullanılmaktadır.

$$X = \mu + \sigma \text{ NRS}$$

Normal rassal sayıyı EXCEL de elde edebilmek için, bir hücreye Normters fonksiyonu “NORMTERS(S_SAYI_ÜRET() ; 0 ; 1)” şeklinde yazılması yeterli olur.