EMS 302

ÇOK ÖLÇÜTLÜ KARAR VERME PROBLEMLERİ

DR. ERDEM AKSAKAL

ARAS Yöntemi (Additive Ratio Assesment)

- ARAS yöntemi ilk olarak 2010 yılında Zavadskas ve Turskis tarafından literatüre kazandırılmıştır.
- ARAS yöntemi alternatifin performansını belirlemeye yardımcı olur ve her alternatifin ideal alternatife göre oransal benzerliğini ortaya koyar.
- ARAS yöntemine göre bir araştırmada olası bir alternatifin göreli etkinliğini belirlemekte kullanılan fayda fonksiyonu, kriterlerin ağırlık ve değerlerinin göreli etkileri ile direkt orantılıdır.
- Literatürde Bulanık mantık ve gri teori ile entegre modellendiği çalışmalarda mevcuttur.

ARAS Yöntemi

- ARAS yöntemi alternatifin performansını belirlemeye yardımcı olur ve her alternatifin ideal alternatife göre oransal benzerliğini ortaya koyar.
- Örneğin bir kriterin optimal değerinin 10 olduğunu, ancak bu kritere göre değerlendirmede alternatifler arasındaki en büyük skorun 9 olduğunu kabul edelim.
- Bu durumda kriterin optimallik değeri diğer çok kriterli karar verme yöntemlerinde olduğu gibi 1.0 değil 0.9’olarak hesaplanır.
- Bu özellik nedeniyle ARAS yöntemi, ÇKKV yöntemleri arasında oransal derecelendirme amacına en uygun yöntem olarak görülmektedir.

ARAS Yöntemi

Adım 1: Karar Matrisinin Belirlenmesi

- $$X = \left[x_{ij}\right]_{m*n} = \begin{bmatrix} x_{01} & \cdots & x_{0j} & \cdots & x_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mj} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad ; i = 1, \dots, m \;\; j = 1, \dots, n \qquad (1)$$

- i alternatif sayısını, j ölçüt sayısını göstermektedir.
- x_{ij} değeri ise i. alternatifin j.ölçüt temelinde aldığı değeri göstermektedir.
- Karar matrisinin en üst satırında ölçütlerin $\left(x_{0j}\right)$ optimal değerleri bulunmaktadır.

ARAS Yöntemi

- Karar probleminde kritere ait optimal değer bilinmiyorsa,
  - Kriterin fayda (daha yüksek daha iyi) ya da
  - Maliyet (daha düşük daha iyi) özelliği göstermesi durumuna göre
- Optimal değer Eşitlik (2) ve (3) kullanılarak hesaplanır.

$$x_{0j} = \max_i x_{ij} \; eğer \; j. \text{ölçütün} \; yön\text{ü} \; maksimizasyon \; ise \qquad (2)$$

$$x_{0j} = \min_i x_{ij} \; eğer \; j. \text{ölçütün} \; yön\text{ü} \; minimizasyon \; ise \qquad (3)$$

ARAS Yöntemi

Adım 2: Normalize Karar Matrisinin Belirlenmesi

- $$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{01} & \cdots & \bar{x}_{0j} & \cdots & \bar{x}_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{i1} & \cdots & \bar{x}_{ij} & \cdots & \bar{x}_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_{m1} & \cdots & \bar{x}_{mj} & \cdots & \bar{x}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad ; i = \overline{0, \dots, m} \;\; j = \overline{1, \dots, n} \qquad (4)$$

- Maksimizasyon (fayda) ölçütleri için eşitlik 5, Minimizasyon (maliyet) ölçütleri için eşitlik 6 kullanılarak normalizasyon işlemleri gerçekleştirilir.

- $$\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} x_{ij}} \qquad (5)$$

- $$x_{ij}^{*} = \frac{1}{x_{ij}}, \bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}^{*}}{\sum_{i=0}^{m} x_{ij}^{*}} \qquad (6)$$

ARAS Yöntemi

Adım 3: Ağırlıklı Normalize Karar Matrisinin Belirlenmesi

- $\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{01} & \cdots & \hat{x}_{0j} & \cdots & \hat{x}_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{i1} & \cdots & \hat{x}_{ij} & \cdots & \hat{x}_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{x}_{m1} & \cdots & \hat{x}_{mj} & \cdots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad ; i = 0, \dots, m \;\; j = 1, \dots, n$ (7)

- w_j ağırlık değerleri verilebileceği gibi bir ağırlık yöntemi ile elde edilip kullanılabilir

- $\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} w_j$ (8)

ARAS Yöntemi

Adım 4: Optimallik Fonksiyon Değerlerinin Hesaplanması

- Yöntemin son adımında her bir alternatif için optimallik fonksiyon değeri hesaplanarak alternatiflerin değerlendirilmesi işlemi gerçekleştirilir.

- S_i , i. alternatifin optimallik fonksiyon değerini gösterir. Alternatiflere ait değerler Eşitlik 9 ile elde edilir.

- $S_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} \;;\; i = 0, \ldots, m$ (9)

- Hesaplanan S_i değerlerinden daha büyük değerler daha etkin alternatifleri göstermektedir.

ARAS Yöntemi

Adım 4: Optimallik Fonksiyon Değerlerinin Hesaplanması-Devam

- Eşitlik 10 kullanılarak alternatiflere ait S_i değerleri S_0 optimal fonksiyon değerine oranlanarak K_i fayda dereceleri hesaplanmaktadır.

- $K_i = \frac{S_i}{S_0};\ i = 0, \dots, m$ (10)

- [0,1] aralığında değer alan K_i oranları kullanılarak alternatiflerin fayda fonksiyonu değerlerinin göreli etkinliği hesaplanabilmektedir.

- Bu doğrultuda değerleri büyükten küçüğe sıralanarak alternatiflerin önem derecesine göre sıralaması belirlenir.

Örnek

- Bir ekipman seçim probleminde esneklik, güç, maliyet ve satış sonrası hizmet ölçütleri temelinde 9 alternatif değerlendirmeye alınmıştır.

- Problemin çözümünde AHP yöntemi ile ağırlıklar elde edilmiş, ARAS yöntemi ile çözümleme yapılmıştır.

Örnek-AHP

- **Adım 1:** İkili Karşılaştırma Matrisi (A) düzenlenir.

	C1	C2	C3	C4
C1	1,0000	0,2000	5,0000	0,3333
C2	5,0000	1,0000	7,0000	1,0000
C3	0,2000	0,1429	1,0000	0,2000
C4	3,0000	1,0000	5,0000	1,0000

- **Adım 2:** Karşılaştırma Matrisinin her elemanı, kendi sütun toplamına bölünerek normalleştirilmiş karşılaştırma matrisi elde edilir.

Örnek-AHP

- **Adım 2:** Karşılaştırma Matrisinin her elemanı, kendi sütun toplamına bölünerek normalleştirilmiş karşılaştırma matrisi elde edilir.

	C1	C2	C3	C4
C1	0,1087	0,0854	0,2778	0,1316
C2	0,5435	0,4268	0,3889	0,3947
C3	0,0217	0,0610	0,0556	0,0789
C4	0,3261	0,4268	0,2778	0,3947

- **Adım 3:** Normalleştirilmiş Karşılaştırma Matrisinin her satırında satır ortalamaları hesaplanır. Bu ortalama değerleri ölçütlerin göreli önemlerini (ağırlıklar) ifade eder.

Örnek-AHP

- **Adım 3:** Normalleştirilmiş Karşılaştırma Matrisinin her satırında satır ortalamaları hesaplanır. Bu ortalama değerleri ölçütlerin göreli önemlerini (ağırlıklar) ifade eder.

Satır Toplamları	Ağırlıklar
0,6034	0,1509
1,7539	0,4385
0,2172	0,0543
1,4254	0,3564

Örnek-AHP

- **Adım 4:** AHP sonuçlarının geçerli olabilmesi için A matrisinin tutarlı olması gerekmektedir. Tutarlı A matrisi için öncelikle ağırlıklar toplamının 1 olmak üzere ağırlık vektörü elde edilmesi gerekmektedir.

- Ağırlık vektörü, Adım 3'te elde edilen göreli önem değerleri (ağırlıklar) ile Adım 1'de oluşturulan karşılaştırma matrisinin çarpılıp toplanması ile elde edilir.

- Ağırlık vektörü belirlenmesinin ardından Tutarlılık İndeksinin belirlenmesi için $CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$ eşitliği ile hesaplama yapılır.

- λ_{max} değeri ağırlık vektörünün ilgili göreli önem değerlerine (ağırlıklar) bölünmesi ile elde edilir.

- **Adım 5:** Tutarlılık oranının belirlenmesi $CR = \frac{CI}{RI}$ eşitliği hesaplanır.

- RI Rastgelelik indeks değeridir ve matris boyutuna (n) bağlı olarak aşağıdaki tablodan alınır.

Örnek-AHP

- Sonuçlar

Ağırlık Vektörü
0,6289
1,9292
0,2184
1,5189

λ_{max} = 4,2131 ; CI = 0,0710; RI = 0,0789

Örnek-ARAS

- ARAS yöntemi karar matrisinin belirlenmesi için öncelikle (x_{0j}) optimal değerlerinin bulunması gerekmektedir.

A1	10	5	1,4	50
A2	7	8	2,15	75
A3	6	6	1,5	85
A4	8	7	1,95	65
A5	8	10	2,45	100
A6	9	8	2	60
A7	6	5	1,75	75
A8	7	7	1,8	90
A9	5	9	2,2	80

ARAS Yöntemi

- **Adım 1:** Karar Matrisinin Belirlenmesi

$$x_{0j} = \max_{i} x_{ij} \; eğer \; j. \text{ölçütün} \; y\text{önü} \; maksimizasyon \; ise$$

$$x_{0j} = \min_{i} x_{ij} \; eğer \; j. \text{ölçütün} \; y\text{önü} \; minimizasyon \; ise$$

Örnek-ARAS

Adım 1: Karar Matrisinin Belirlenmesi

	ENB	ENB	ENK	ENB
A0	10	10	1,4	100
A1	10	5	1,4	50
A2	7	8	2,15	75
A3	6	6	1,5	85
A4	8	7	1,95	65
A5	8	10	2,45	100
A6	9	8	2	60
A7	6	5	1,75	75
A8	7	7	1,8	90
A9	5	9	2,2	80

ARAS Yöntemi

Adım 2: Normalize Karar Matrisinin Belirlenmesi

- $\bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=0}^{m} x_{ij}}$ Maksimizasyon (fayda) ölçütleri

- $x_{ij}^* = \frac{1}{x_{ij}}, \bar{x}_{ij} = \frac{x_{ij}^*}{\sum_{i=0}^{m} x_{ij}^*}$ Minimizasyon (maliyet) ölçütleri

Örnek-ARAS

Adım 2: Normalize Karar Matrisinin Belirlenmesi

A0	0,1316	0,1333	0,1284	0,1282
A1	0,1316	0,0667	0,1284	0,0641
A2	0,0921	0,1067	0,0836	0,0962
A3	0,0789	0,0800	0,1198	0,1090
A4	0,1053	0,0933	0,0922	0,0833
A5	0,1053	0,1333	0,0734	0,1282
A6	0,1184	0,1067	0,0899	0,0769
A7	0,0789	0,0667	0,1027	0,0962
A8	0,0921	0,0933	0,0999	0,1154
A9	0,0658	0,1200	0,0817	0,1026

ARAS Yöntemi

Adım 3: Ağırlıklı Normalize Karar Matrisinin Belirlenmesi

- w_j ağırlık değerleri AHP yöntemi ile belirlenmişti.

- $w_1 = 0{,}1509,\ w_2 = 0{,}4385,\ w_3 = 0{,}0543,\ w_4 = 0{,}3564$

- $\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij} w_j$

Örnek-ARAS

Adım 3: Ağırlıklı Normalize Karar Matrisinin Belirlenmesi

A0	0,0198	0,0585	0,0070	0,0457
A1	0,0198	0,0292	0,0070	0,0228
A2	0,0139	0,0468	0,0045	0,0343
A3	0,0119	0,0351	0,0065	0,0388
A4	0,0159	0,0409	0,0050	0,0297
A5	0,0159	0,0585	0,0040	0,0457
A6	0,0179	0,0468	0,0049	0,0274
A7	0,0119	0,0292	0,0056	0,0343
A8	0,0139	0,0409	0,0054	0,0411
A9	0,0099	0,0526	0,0044	0,0365

ARAS Yöntemi

Adım 4: Optimallik Fonksiyon Değerlerinin Hesaplanması

- S_i , i. alternatifin optimallik fonksiyon değerini gösterir.
- $S_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij}$; $i = 0, \dots, m$
- Hesaplanan S_i değerlerinden daha büyük değerler daha etkin alternatifleri göstermektedir.
- Alternatiflere ait S_i değerleri S_0 optimal fonksiyon değerine oranlanarak K_i fayda dereceleri hesaplanmaktadır.
- $K_i = \frac{S_i}{S_0}$; $i = 0, \dots, m$
- Bu doğrultuda değerleri büyükten küçüğe sıralanarak alternatiflerin önem derecesine göre sıralaması belirlenir.

Örnek-ARAS

Adım 4: Optimallik Fonksiyon Değerlerinin Hesaplanması

	S	K	
A0	0,1310	1,0000	Sıralama
A1	0,0789	0,6024	9
A2	0,0995	0,7595	4
A3	0,0923	0,7050	6
A4	0,0915	0,6987	7
A5	0,1240	0,9469	1
A6	0,0969	0,7401	5
A7	0,0810	0,6183	8
A8	0,1014	0,7739	3
A9	0,1035	0,7905	2